Tarea guía 1

Fundamentos para el Análisis Cuantitativo

1.- Entrega cuatro de los siguientes ejercicios. Realiza las operaciones y escribe el resultado en la forma $a + ib$.

3. $(5 - 9i) + (2 - 4i)$

4. $3(4 - i) - 3(5 + 2i)$

5. $i(5 + 7i)$

6. $i(4 - i) + 4i(1 + 2i)$

7. $(2 - 3i)(4 + i)$

8. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i\right)$

9. $3i + \dfrac{1}{2 - i}$

10. $\dfrac{i}{1 + i}$

11. $\dfrac{2 - 4i}{3 + 5i}$

12. $\dfrac{10 - 5i}{6 + 2i}$

13. $\dfrac{(3 - i)(2 + 3i)}{1 + i}$

14. $\dfrac{(1 + i)(1 - 2i)}{(2 + i)(4 - 3i)}$

15. $\dfrac{(5 - 4i) - (3 + 7i)}{(4 + 2i) + (2 - 3i)}$

16. $\dfrac{(4 + 5i) + 2i^3}{(2 + i)^2}$

17. $i(1 - i)(2 - i)(2 + 6i)$

18. $(1 + i)^2(1 - i)^3$

19. $(3 + 6i) + (4 - i)(3 + 5i) + \dfrac{1}{2 - i}$

20. $(2 + 3i)\left(\dfrac{2 - i}{1 + 2i}\right)^2$

2.- Entrega dos de las siguientes ecuaciones. Resuelve las ecuaciones, determinando cuánto vale z.

37. $2z = i(2 + 9i)$

38. $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$

39. $z^2 = i$

40. $\bar{z}^2 = 4z$

41. $z + 2\bar{z} = \dfrac{2 - i}{1 + 3i}$

42. $\dfrac{z}{1 + \bar{z}} = 3 + 4i$

3.- Entrega un ejercicio. Determina el módulo de los siguientes números complejos.

9. $(1 - i)^2$

10. $i(2 - i) - 4\left(1 + \frac{1}{4}i\right)$

11. $\dfrac{2i}{3 - 4i}$

12. $\dfrac{1 - 2i}{1 + i} + \dfrac{2 - i}{1 - i}$

4.- Entrega 3 ejercicios. Determina la forma polar de los siguientes números complejos:

1. 2

2. -10

3. $-3i$

4. $6i$

5. $1+i$

6. $5-5i$

7. $-\sqrt{3}+i$

8. $-2-2\sqrt{3}i$

9. $\dfrac{3}{-1+i}$

10. $\dfrac{12}{\sqrt{3}+i}$

4.- Entrega 2 ejercicios. Transforma los siguientes números complejos en forma polar a forma algebraica, es decir, a la forma $a+ib$.

15. $z=5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

16. $z=8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4}+i\sin\dfrac{11\pi}{4}\right)$

17. $z=6\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$

18. $z=10\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

5.- Entrega 1 ejercicio. Determina $\frac{z_1}{z_2}$ y $z_1 \cdot z_2$.

19. $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right),\ z_2=4\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$

20. $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\ z_2=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

6.- Entrega 2 ejercicios. Determina las siguientes potencias de números complejos.

25. $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9$

26. $(2-2i)^5$

27. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$

28. $(-\sqrt{2}+\sqrt{6}i)^4$

29. $\left[\left(\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\right)\right]^{12}$

30. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)\right]^6$

7.- entrega 1 ejercicio. Determina todas las raíces de los siguientes números.

9. $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$

10. $(-1-\sqrt{3}i)^{1/4}$

11. $(3+4i)^{1/2}$

12. $(5+12i)^{1/2}$

13. $\left(\dfrac{16i}{1+i}\right)^{1/8}$

14. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{1/6}$

8.-

¿En cada uno de los ejercicios *a*) al *f*), responda las preguntas siguientes: ¿es $A \subseteq B$? ¿Es $B \subseteq A$? ¿Es ya sea A o B un subconjunto propio del otro?

a. $A = \{2, \{2\}, (\sqrt{2})^2\}, \ B = \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$

c. $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}, \ B = \{1, 2, 3\}$

d. $A = \{a, b, c\}, \ B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

e. $A = \{\sqrt{16}, \{4\}\}, \ B = \{4\}$

9.-

Sea $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 6, 9\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados:

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B$ **c.** $A \cup C$ **d.** $A \cap C$

e. $A - B$ f. $B - A$ g. $B \cup C$ h. $B \cap C$

10.-

Sea el conjunto universo, el conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales y sea $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < 4\}$ y $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 \leq x < 9\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados:

a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. A^c d. $A \cup C$

e. $A \cap C$ f. B^c g. $A^c \cap B^c$

h. $A^c \cup B^c$ i. $(A \cap B)^c$ j. $(A \cup B)^c$

11.-

Indique cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

a. $\mathbf{Z}^+ \subseteq \mathbf{Q}$
b. $\mathbf{R}^- \subseteq \mathbf{Q}$
c. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$
d. $\mathbf{Z}^- \cup \mathbf{Z}^+ = \mathbf{Z}$
e. $\mathbf{Z}^- \cap \mathbf{Z}^+ = \emptyset$
f. $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}$
g. $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Q}$
h. $\mathbf{Z}^+ \cap \mathbf{R} = \mathbf{Z}^+$
i. $\mathbf{Z} \cup \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$

12.-

Para cada uno de los siguientes enunciados, dibuje un diagrama de Venn para los conjuntos A, B y C que satisface las condiciones dadas:

a. $A \subseteq B$; $C \subseteq B$; $A \cap C = \emptyset$
b. $C \subseteq A$; $B \cap C = \emptyset$

13.-

Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{b, c, e\}$.

a. Determine $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?
b. Determine $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$ y $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?
c. Determine $(A - B) - C$, $A - (B - C)$. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?

14.-

a. ¿Está el número 0 en $\emptyset$? ¿Por qué?
b. ¿Es $\emptyset = \{\emptyset\}$? ¿Por qué?
c. ¿Es $\emptyset \in \{\emptyset\}$? ¿Por qué?
d. ¿Es $\emptyset \in \emptyset$? ¿Por qué?

15.-

Sea $A_i = \{i, i^2\}$ para todo entero $i = 1, 2, 3, 4$.

a. ¿$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 =$?
b. ¿$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 =$?
c. ¿Son A_1, A_2, A_3 y A_4 mutuamente disjuntos? Explique.

16.-

Sea $W_i = \{x \in \mathbf{R} | x > i\} = (i, \infty)$ para todo entero no negativo i.

a. $\bigcup_{i=0}^{4} W_i = ?$

b. $\bigcap_{i=0}^{4} W_i = ?$

c. ¿Son $W_0, W_1, W_2, \ldots$ mutuamente disjuntos? Explique.

d. $\bigcup_{i=0}^{n} W_i = ?$

e. $\bigcap_{i=0}^{n} W_i = ?$

f. $\bigcup_{i=0}^{\infty} W_i = ?$

g. $\bigcap_{i=0}^{\infty} W_i = ?$

17.-

Suponga que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados

a. $\mathscr{P}(A \cap B)$

b. $\mathscr{P}(A)$

c. $\mathscr{P}(A \cup B)$

d. $\mathscr{P}(A \times B)$

Cheatsheet — Tarea guía 1

Números complejos y teoría de conjuntos

1. Operaciones en forma $a+ib$

- $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1.\quad i^n=i^{\,n \bmod 4}$.
- Suma: $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$.
- Producto (FOIL): $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.
- Conjugado: $\bar z=a-bi;\ \ z\bar z=a^2+b^2$ (real).
- **División:** multiplica arriba y abajo por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

- $(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi;\ \ (1+i)^2=2i,\ \ (1-i)^2=-2i$.
- Propiedades: $\overline{z\pm w}=\bar z\pm\bar w,\ \ \overline{zw}=\bar z\,\bar w$.

2. Ecuaciones en z

- Sustituye $z=x+iy$ (y $\bar z=x-iy$), expande y **iguala partes reales e imaginarias**: $a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d \Rightarrow$ sistema de 2 ecuaciones en x,y.
- Si z está en un denominador, primero despeja (multiplica cruzado).
- $z^2=w$: con $z=x+iy$: $x^2-y^2=\operatorname{Re}w$, $2xy=\operatorname{Im}w$; o usa raíces (sección 6).
- Con $\bar z^2=4z$: no olvides la solución $z=0$.

3. Módulo

- $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- $|zw|=|z||w|,\quad \left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|},\quad |z^n|=|z|^n$.
- ¡Ojo! $|z+w|\neq|z|+|w|$: en sumas, primero simplifica a $a+bi$.

4. Forma polar ↔ algebraica

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\operatorname{cis}\theta=re^{i\theta}$$

- $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2},\quad \tan\theta=\dfrac{b}{a}$.
- **Cuidado con el cuadrante** (arctan sólo da I y IV):
  I ($a>0,b>0$): $\theta=\alpha$ — II ($a<0,b>0$): $\theta=\pi-\alpha$
  III ($a<0,b<0$): $\theta=\pi+\alpha$ — IV ($a>0,b<0$): $\theta=2\pi-\alpha$
  con $\alpha=\arctan|b/a|$.
- Ejes: $a>0$: $\theta=0$; $a<0$: $\theta=\pi$; bi, $b>0$: $\frac{\pi}{2}$; $b<0$: $\frac{3\pi}{2}$.
- Polar → algebraica: $a=r\cos\theta,\ \ b=r\sin\theta$.

Ángulos notables:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac12$	0
sin	0	$\frac12$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1

Reducción: $\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$ (III), $\frac{11\pi}{4}=2\pi+\frac{3\pi}{4}$ (II). Ángulos no notables ($\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{5}$): calculadora en **radianes**.

5. Producto, cociente y potencias

$$z_1z_2=r_1r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2),\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$$

De Moivre: $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

- Pasa $a+bi$ a polar, eleva, reduce $n\theta$ restando múltiplos de 2π, regresa a $a+bi$.

6. Raíces n-ésimas (n raíces distintas)

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right],\quad k=0,1,\dots,n-1$$

- $z^{1/n}=$ todas las raíces; separadas por $\frac{2\pi}{n}$ (polígono regular).
- Si hay cociente adentro, simplifícalo primero (ej. $\frac{16i}{1+i}=8+8i$).

7. Pertenencia ($\in$)

- $x\in A$: x es *elemento* de A. Repetidos no cuentan: $\{2,(\sqrt2)^2\}=\{2\}$; $\{\sqrt{16}\}=\{4\}$.
- $2\neq\{2\}\neq\{\{2\}\}$: los corchetes cambian el elemento. $\emptyset$ no tiene elementos: $x\notin\emptyset\ \forall x$ (incluso $\emptyset\notin\emptyset$, $0\notin\emptyset$).
- $\emptyset\neq\{\emptyset\}$ (este tiene 1 elemento) y $\emptyset\in\{\emptyset\}$.

8. Subconjuntos ($\subseteq$)

- $A\subseteq B \iff$ **todo** $x\in A$ cumple $x\in B$. Para probarlo: revisa cada elemento de A. Para refutarlo: basta **un** $x\in A$ con $x\notin B$.
- **Propio:** $A\subsetneq B$ si $A\subseteq B$ y $A\neq B$ (a B le sobra algo).
  $A=B \iff A\subseteq B$ y $B\subseteq A$.
- Siempre: $\emptyset\subseteq A,\ \ A\subseteq A$. Transitiva: $A\subseteq B,\ \ B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.
- $x\in A \iff \{x\}\subseteq A$. ¡No confundir! $\{2\}\in\{2,\{2\}\}$ *y también* $\{2\}\subseteq\{2,\{2\}\}$.
- $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B;\ \ A-B\subseteq A$. Si $A\subseteq B$: $A\cup B=B$, $A\cap B=A$, $B^c\subseteq A^c$.
- Con $|A|=n$: hay 2^n subconjuntos, 2^n-1 propios, y $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ de tamaño k.
- **Venn:** $A\subseteq B=$ círculo A dentro de B; $\ A\cap C=\emptyset=$ círculos sin tocarse.

9. Operaciones

- $A\cup B=\{x: x\in A \text{ o } x\in B\}\quad A\cap B=\{x: x\in A \text{ y } x\in B\}$
- $A-B=\{x\in A: x\notin B\}\quad A^c=U-A\quad$ (en general $A-B\neq B-A$)
- Disjuntos: $A\cap B=\emptyset$. Mutuamente disjuntos: $A_i\cap A_j=\emptyset\ \forall i\neq j$.
- **De Morgan:** $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\quad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.
- **Distributivas:** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
  $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $(A-B)-C=A-(B\cup C)$, en general $\neq A-(B-C)$.

10. Intervalos en $\mathbb{R}$

- $(a,b]=\{x: a<x\leq b\}$; paréntesis = abierto ($<$), corchete = cerrado ($\leq$).
- **Dibuja la recta numérica** y sombrea; para A^c invierte: $(0,2]^c=(-\infty,0]\cup(2,\infty)$.
- Intersección = donde se traslapan; si no se traslapan $\Rightarrow\emptyset$.

11. Conjuntos numéricos

$$\mathbb{Z}^+\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

- $\mathbb{Z}^-\cup\mathbb{Z}^+=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (¡el 0 no es positivo ni negativo!).
- $\mathbb{R}^-\not\subseteq\mathbb{Q}$ (ej. $-\sqrt2$); $\ \mathbb{Q}\not\subseteq\mathbb{Z}$ (ej. $\frac12$).

12. Familias indexadas

$$\bigcup_{i=0}^{n}A_i=\{x: x\in A_i \text{ para } \textbf{algún } i\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n}A_i=\{x: x\in A_i \text{ para } \textbf{todo } i\}$$

- Conjuntos anidados $W_0\supseteq W_1\supseteq\cdots$: la unión es el **más grande** (W_0), la intersección el **más chico** (W_n).
- Intersección infinita: busca un x que esté en *todos*; si para cada x hay un $i>x$, queda $\emptyset$.

13. Producto cartesiano

- $A\times B=\{(a,b): a\in A,\ b\in B\},\ \ |A\times B|=|A|\,|B|$. Orden importa: $(1,2)\neq(2,1)$.

14. Conjunto potencia $\mathscr{P}(A)$

- $\mathscr{P}(A)=\{X: X\subseteq A\}$: sus *elementos* son **conjuntos**.
  $X\in\mathscr{P}(A) \iff X\subseteq A$.
- Siempre $\emptyset\in\mathscr{P}(A)$ y $A\in\mathscr{P}(A)$. $\quad|\mathscr{P}(A)|=2^{|A|}$.
- Lista por tamaño (0, 1, 2, … elementos) para no olvidar ninguno:
  $\mathscr{P}(\{1,2,3\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
- $\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$ (1 elemento); $\ \mathscr{P}(\{a\})=\{\emptyset,\{a\}\}$.
- $\mathscr{P}(A\cap B)=\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B);\ \ \mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$ (en general $\neq$).
- $A\subseteq B\Rightarrow\mathscr{P}(A)\subseteq\mathscr{P}(B)$.
- $\mathscr{P}(A\times B)$: los elementos son conjuntos de *pares*; $|\mathscr{P}(A\times B)|=2^{|A||B|}$ (con $|A|=|B|=2$: $2^4=16$).