Guía de estudio

Conjuntos y números complejos

Contenido

1 Teoría de conjuntos **2**
- 1.1 Ideas clave . . . 2
- 1.2 Operaciones . . . 2
- 1.3 Leyes más usadas . . . 2
- 1.4 Intervalos . . . 2
- 1.5 Uniones e intersecciones indexadas . . . 2

2 Números complejos: lo básico **3**
- 2.1 Definiciones . . . 3
- 2.2 Potencias de i (ciclo de 4) . . . 3
- 2.3 Forma polar . . . 3
- 2.4 ¿Qué forma conviene usar? . . . 3

3 Suma y resta **4**

4 Multiplicación y potencias **4**
- 4.1 En forma binómica . . . 4
- 4.2 Binomio de Newton (potencias pequeñas) . . . 4
- 4.3 En forma polar . . . 5
- 4.4 Potencias: Teorema de De Moivre . . . 5

5 División **5**
- 5.1 En forma binómica: multiplicar por el conjugado . . . 5
- 5.2 En forma polar . . . 5

6 Raíces **5**
- 6.1 Raíces en los reales vs. complejos . . . 5
- 6.2 Fórmula . . . 6
- 6.3 Ejemplos . . . 6
- 6.4 Raíz cuadrada en forma binómica (método alternativo) . . . 6

7 Ecuaciones **6**
- 7.1 Ecuaciones lineales en z . . . 6
- 7.2 Ecuaciones con $z = a + bi$ (igualando partes) . . . 6
- 7.3 Ecuaciones cuadráticas . . . 7
- 7.4 Ecuaciones de la forma $z^n = w$ . . . 7

8 Ejercicios **8**

1 Teoría de conjuntos

1.1 Ideas clave

- Un **conjunto** es una colección de elementos. Se escribe por extensión, $A = \{1, 2, 3\}$, o por comprensión, $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$.
- $x \in A$: x pertenece a A. $A \subseteq B$: todo elemento de A está en B.
- $\varnothing$ es el conjunto vacío; U es el universo.
- $|A|$ es la cardinalidad (cuántos elementos tiene). Si $|A| = n$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

1.2 Operaciones

Operación	Notación	Se queda con...
Unión	$A \cup B$	lo que está en A **o** en B
Intersección	$A \cap B$	lo que está en A **y** en B
Diferencia	$A - B$	lo de A que **no** está en B
Complemento	A^c	lo de U que no está en A
Diferencia simétrica	$A \triangle B$	lo que está en uno solo de los dos
Producto cartesiano	$A \times B$	parejas (a, b) con $a \in A,\ b \in B$

1.3 Leyes más usadas

$$\text{De Morgan:}\quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$\text{Distributivas:}\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{Inclusión–exclusión:}\quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

1.4 Intervalos

(a, b) abierto (sin extremos), $[a, b]$ cerrado (con extremos), $[a, b)$ y $(a, b]$ semiabiertos. El infinito siempre va con paréntesis: $[a, +\infty)$.

1.5 Uniones e intersecciones indexadas

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \text{ (está en } \textbf{alguno}\text{)}, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \text{ (está en } \textbf{todos}\text{)}$$

Método: escribe los primeros 3 o 4 conjuntos, observa si crecen o se encogen, y revisa los extremos.
Ejemplo de clase:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (i,\ i+1) = (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \cdots = (1, +\infty) - \mathbb{N}$$

Los intervalos son abiertos, así que los enteros $2, 3, 4, \ldots$ quedan fuera.

2 Números complejos: lo básico

2.1 Definiciones

$$i^2 = -1, \qquad z = a + bi, \quad a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z)$$

Concepto	Fórmula	Ejemplo con $z = 3 - 4i$
Conjugado	$\overline{z} = a - bi$	$3 + 4i$
Módulo	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{9 + 16} = 5$
Propiedad clave	$z\,\overline{z} = a^2 + b^2$	$(3 - 4i)(3 + 4i) = 25$

Igualdad: dos complejos son iguales si y solo si coinciden su parte real **y** su parte imaginaria:

$$a + bi = c + di \iff a = c \ \text{ y } \ b = d$$

2.2 Potencias de i (ciclo de 4)

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^n = i^{\,n \bmod 4}$$

2.3 Forma polar

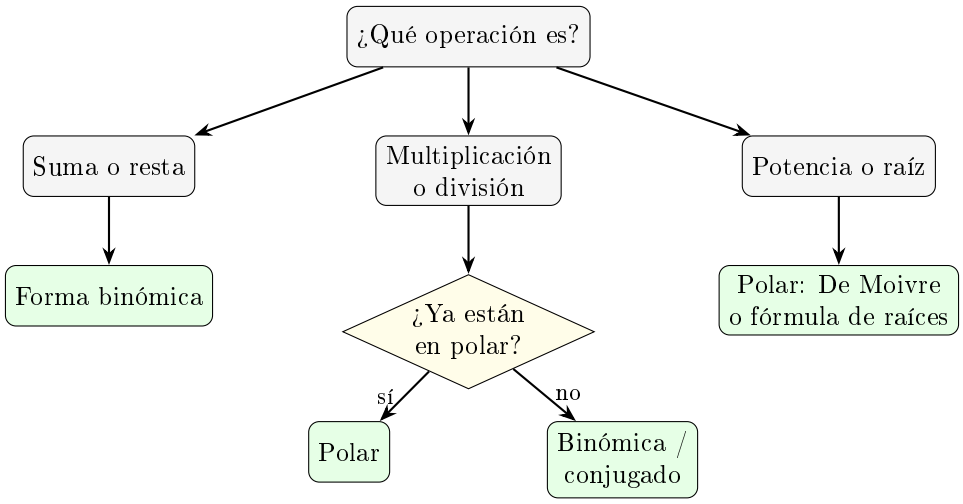
$$z = r\,\mathrm{cis}(\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ (corregir cuadrante)}$$

Cuadrante	θ (con $\alpha = \tan^{-1}\lvert b/a\rvert$)
I $(+,+)$	α
II $(-,+)$	$\pi - \alpha$
III $(-,-)$	$\pi + \alpha$
IV $(+,-)$	$2\pi - \alpha$

De regreso a binómica: $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$.

2.4 ¿Qué forma conviene usar?

Operación	Forma recomendada	Por qué
Suma y resta	binómica	en polar no hay fórmula sencilla
Multiplicación de dos números	binómica o polar	ambas son rápidas
División	conjugado o polar	polar es más corta si ya está en polar
Potencias grandes (z^{10})	polar (De Moivre)	evita desarrollar binomios enormes
Raíces	polar	es la forma práctica de obtener las n



3 Suma y resta

Se suman (o restan) **parte real con parte real** e **imaginaria con imaginaria**:

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)\, i$$

Ejemplos:

$$(3+2i) + (1-5i) = 4-3i$$
$$(-2+i) - (4-3i) = -2+i-4+3i = -6+4i$$

Interpretación geométrica: sumar complejos es sumar vectores (regla del paralelogramo).

Cuidado: al restar, el signo menos afecta a **ambas** partes del segundo número.

4 Multiplicación y potencias

4.1 En forma binómica

Se multiplica como polinomio y se usa $i^2 = -1$:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\, i$$

Ejemplo:

$$(3+2i)(1-5i) = 3-15i+2i-10i^2 = 3-13i+10 = 13-13i$$

4.2 Binomio de Newton (potencias pequeñas)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Coeficientes del triángulo de Pascal:

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Ejemplo:

$$(2+3i)^3 = 2^3 + 3(2)^2(3i) + 3(2)(3i)^2 + (3i)^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$$

4.3 En forma polar

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

Se **multiplican los módulos** y se **suman los ángulos**.

Ejemplo:

$$3\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 3\sqrt{3}\,i$$

4.4 Potencias: Teorema de De Moivre

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

Ejemplo: $(1+i)^8$, con $1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis}(2\pi) = 16$$

Cuidado: $(\sqrt{r})^n = r^{n/2}$. Por ejemplo $(\sqrt{13})^{10} = 13^5$, **no** $\sqrt[5]{13}$.

5 División

5.1 En forma binómica: multiplicar por el conjugado

Se multiplica arriba y abajo por el **conjugado del denominador**, para que el denominador quede real:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

Ejemplo:

$$\frac{4+2i}{1+i} = \frac{(4+2i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{4-4i+2i-2i^2}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3-i$$

Caso especial: $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{1} = -i$

5.2 En forma polar

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2), \qquad z_2 \neq 0$$

Se **dividen los módulos** y se **restan los ángulos**.

Ejemplo (de clase): $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = i = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-i$$

6 Raíces

6.1 Raíces en los reales vs. complejos

- $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$: existen en los reales.
- $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-9}$ (índice par de un negativo): **no** existen en los reales.
- En los complejos, todo $z \neq 0$ tiene **exactamente n raíces n-ésimas**.

6.2 Fórmula

Si $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$:

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Pasos:

1. Pasa z a polar: obtén r y θ.
2. Calcula $\sqrt[n]{r}$ (el módulo de todas las raíces).
3. Sustituye $k = 0, 1, \ldots, n-1$ en el ángulo.
4. Si se pide, pasa cada w_k a binómica.

Geometría: las raíces forman un polígono regular de n lados sobre un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$; están separadas por $\frac{2\pi}{n}$.

6.3 Ejemplos

Raíces cuadradas de -1 $(-1 = \mathrm{cis}(\pi))$:

$$w_0 = \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i, \qquad w_1 = \mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Raíces cúbicas de -1:

$$w_0 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad w_1 = -1, \qquad w_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

Raíces cuartas de -1:

$$w_k = \mathrm{cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right): \qquad \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{(las cuatro combinaciones de signos)}$$

6.4 Raíz cuadrada en forma binómica (método alternativo)

Para $\sqrt{c + di}$, se busca $a + bi$ con $(a + bi)^2 = c + di$:

$$a^2 - b^2 = c, \qquad 2ab = d$$

Ejemplo: $\sqrt{3 + 4i}$: $a^2 - b^2 = 3$, $ab = 2 \Rightarrow a = 2$, $b = 1$. Las raíces son $\pm(2 + i)$.

7 Ecuaciones

7.1 Ecuaciones lineales en z

Se despeja z como en los reales; al final suele quedar una división de complejos.

Ejemplo: $(2 + i)\,z = 3 - i$

$$z = \frac{3 - i}{2 + i} = \frac{(3 - i)(2 - i)}{2^2 + 1^2} = \frac{6 - 3i - 2i + i^2}{5} = \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i$$

7.2 Ecuaciones con $z = a + bi$ (igualando partes)

Útil cuando aparece $\overline{z}$ o $|z|$. Se sustituye $z = a + bi$ y se igualan parte real e imaginaria.

Ejemplo: $z + 2\overline{z} = 6 - i$

$$(a + bi) + 2(a - bi) = 3a - bi = 6 - i \implies 3a = 6, \ \ -b = -1 \implies z = 2 + i$$

7.3 Ecuaciones cuadráticas

$$az^2 + bz + c = 0 \implies z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, se usa $\sqrt{-k} = i\sqrt{k}$ y las soluciones son **complejas conjugadas**.

Ejemplo: $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$\Delta = 4 - 20 = -16, \qquad z = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

7.4 Ecuaciones de la forma $z^n = w$

Las soluciones son exactamente las n raíces n-ésimas de w (sección 6).

Ejemplo: $z^3 = 8i$, con $8i = 8\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$w_0 = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \qquad w_1 = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i, \qquad w_2 = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Tip: comprueba siempre elevando una solución a la potencia original.

8 Ejercicios

Conjuntos

Sean $U = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

1. $A \cup B$
2. $A \cap C$
3. $A - B$
4. $(A \cup B)^c$
5. $B \triangle C$
6. $|\mathcal{P}(A)|$
7. De 40 estudiantes, 25 llevan Matemáticas, 18 Física y 10 ambas. ¿Cuántos llevan al menos una? ¿Cuántos ninguna?
8. $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{n}]$
9. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$
10. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty)$

Suma y resta

11. $(3 + 2i) + (1 - 5i)$
12. $(-2 + i) - (4 - 3i)$
13. $2(1 + i) - 3(2 - i)$

Multiplicación y potencias

14. $(3 + 2i)(1 - 5i)$
15. $(2 - i)^2$
16. $(1 + 2i)^3$ con binomio de Newton
17. $(1 - i)^6$ con De Moivre
18. $(\sqrt{3} + i)^5$ con De Moivre
19. i^{23}

División

20. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 5i}$
21. $\dfrac{4 + 2i}{1 + i}$
22. $\dfrac{10\,\mathrm{cis}(5\pi/6)}{2\,\mathrm{cis}(\pi/3)}$

Raíces

23. Las 2 raíces cuadradas de i
24. Las 4 raíces cuartas de 16
25. Las 3 raíces cúbicas de -8
26. $\sqrt{3+4i}$ por el método binómico

Ecuaciones

27. $z + 2i = 3z - 4$
28. $z^2 - 4z + 13 = 0$
29. $z^2 + 9 = 0$
30. $(x + y) + (x - y)\, i = 5 + i$, con $x, y \in \mathbb{R}$
31. $z^4 + 16 = 0$

9 Soluciones

#	Respuesta	Nota
1	$\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$	
2	$\{1,3,5\}$	
3	$\{1,3,5\}$	
4	$\{7,9\}$	
5	U	B y C son disjuntos, así que $B \triangle C = B \cup C$
6	$2^5 = 32$	
7	33 al menos una; 7 ninguna	$25 + 18 - 10 = 33$; $40 - 33 = 7$
8	$[0,1)$	el 1 nunca se alcanza
9	$[0,1]$	los extremos 0 y 1 están en todos
10	$\varnothing$	ningún número es mayor que todos los n
11	$4 - 3i$	
12	$-6 + 4i$	
13	$-4 + 5i$	$2 + 2i - 6 + 3i$
14	$13 - 13i$	
15	$3 - 4i$	$4 - 4i + i^2$
16	$-11 - 2i$	$1 + 6i - 12 - 8i$
17	$8i$	$(\sqrt{2})^6 \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
18	$-16\sqrt{3} + 16i$	$2^5 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
19	$-i$	$23 = 4 \cdot 5 + 3 \Rightarrow i^{23} = i^3$
20	$-\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$	$\dfrac{(3+2i)(1+5i)}{26}$
21	$3 - i$	
22	$5i$	$5 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
23	$\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$	$\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
24	$2,\ 2i,\ -2,\ -2i$	
25	$1 + \sqrt{3}\,i,\ -2,\ 1 - \sqrt{3}\,i$	
26	$\pm(2 + i)$	
27	$2 + i$	$-2z = -4 - 2i$
28	$2 \pm 3i$	$z = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$
29	$\pm 3i$	
30	$x = 3,\ y = 2$	$x + y = 5,\ \ x - y = 1$
31	$\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,i$	$z = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$