1. Familias de conjuntos con índice (tipo ejercicio 15)

FÓRMULAS

¿Qué significa $A_i = \{i,\ i^2\}$?

Es una **receta** para fabricar varios conjuntos. El índice i es un número que vas cambiando y i^2 es "i al cuadrado".

Se sustituye i por cada valor:

i	$\{i,\ i^2\}$	conjunto
1	$\{1,\ 1^2\} = \{1,1\}$	$\{1\}$
2	$\{2,\ 2^2\}$	$\{2,4\}$
3	$\{3,\ 3^2\}$	$\{3,9\}$
4	$\{4,\ 4^2\}$	$\{4,16\}$

En un conjunto los repetidos se escriben una sola vez: $\{1,1\} = \{1\}$.

Unión, intersección y disjuntos

- $A_1 \cup \cdots \cup A_4$: todo lo que aparece en **alguno**.
- $A_1 \cap \cdots \cap A_4$: lo que está en **todos** a la vez.
- **Mutuamente disjuntos**: $A_i \cap A_j = \varnothing$ para *cada par* $i \neq j$. Con **un solo** par que comparta un elemento, la respuesta es **no**.

EJERCICIO RESUELTO

Sea $B_i = \{i,\ i^3\}$ para $i = 1,2,3,4$ ($i^3 = i$ al cubo)

Paso 1: fabricar los conjuntos sustituyendo i:

$$B_1 = \{1, 1^3\} = \{1\}, \qquad B_2 = \{2, 2^3\} = \{2,8\},$$

$$B_3 = \{3, 3^3\} = \{3,27\}, \quad B_4 = \{4, 4^3\} = \{4,64\}.$$

a. $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \{1,2,3,4,8,27,64\}$ (juntar todo sin repetir).

b. $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 = \varnothing$: el 1 sólo está en B_1, el 2 sólo en B_2, ...; ningún número está en los cuatro.

c. ¿Mutuamente disjuntos? Revisamos **todos los pares**:

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \quad B_1 \cap B_3 = \varnothing \quad B_1 \cap B_4 = \varnothing$$
$$B_2 \cap B_3 = \varnothing \quad B_2 \cap B_4 = \varnothing \quad B_3 \cap B_4 = \varnothing$$

Todos vacíos $\Rightarrow$ **sí** son mutuamente disjuntos.

Contraste: $C_i = \{i,\ 2i\}$ para $i = 1,2,3,4$

$C_1 = \{1,2\},\ C_2 = \{2,4\},\ C_3 = \{3,6\},\ C_4 = \{4,8\}$.
Unión $= \{1,2,3,4,6,8\}$. Intersección $= \varnothing$.
¿Disjuntos? **No**, porque $C_1 \cap C_2 = \{2\} \neq \varnothing$.

¡Ojo!

Que la intersección de *todos* sea $\varnothing$ **no** implica que sean disjuntos por pares (ve C_i).

Práctica 1: familias con índice (tipo ejercicio 15)

CON SOLUCIÓN AQUÍ MISMO

1.1 $D_i = \{i,\ i+1\}$ **para** $i = 1, 2, 3, 4$

Calcula **a.** la unión de los cuatro, **b.** la intersección de los cuatro, **c.** ¿son mutuamente disjuntos?

Solución. $D_1 = \{1, 2\},\ D_2 = \{2, 3\},\ D_3 = \{3, 4\},\ D_4 = \{4, 5\}$.

a. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b. $\varnothing$ (por ejemplo $D_1 \cap D_3 = \varnothing$).

c. **No**: $D_1 \cap D_2 = \{2\}$.

1.2 $E_i = \{i,\ -i\}$ **para** $i = 1, 2, 3, 4$

Calcula **a.** la unión de los cuatro, **b.** la intersección de los cuatro, **c.** ¿son mutuamente disjuntos?

Solución. $E_1 = \{1, -1\},\ E_2 = \{2, -2\},\ E_3 = \{3, -3\},\ E_4 = \{4, -4\}$.

a. $\{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

b. $\varnothing$

c. **Sí**: ningún par comparte elementos (cada número aparece en un solo E_i).

AHORA TÚ (soluciones al final)

1.3 $F_i = \{i,\ 10 - i\}$ **para** $i = 1, 2, 3, 4$

Calcula **a.** la unión de los cuatro, **b.** la intersección de los cuatro, **c.** ¿son mutuamente disjuntos?

1.4 $G_i = \{1,\ i\}$ **para** $i = 1, 2, 3, 4$

Calcula **a.** la unión de los cuatro, **b.** la intersección de los cuatro, **c.** ¿son mutuamente disjuntos?

1.5 $H_i = \{i,\ 2^i\}$ **para** $i = 1, 2, 3, 4$ (2^i **= 2 elevado a la** i)

Calcula **a.** la unión de los cuatro, **b.** la intersección de los cuatro, **c.** ¿son mutuamente disjuntos?

2. Uniones e intersecciones de intervalos: familia creciente (tipo ejercicio 16)

FÓRMULAS

Notación con índices

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

Con ∞ arriba: se recorren **todos** los índices.

Familia creciente $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$

Cada conjunto **contiene** al anterior.

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_n \quad \text{(el más grande)}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = A_0 \quad \text{(el más chico)}$$

La unión infinita puede ser "todo" ($\mathbb{R}$).

Intervalos

(a, b): sin extremos $\quad [a, b]$: con extremos
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad$ (∞ siempre con paréntesis)

EJERCICIO RESUELTO

Sea $V_i = (-i,\ i)$ para todo entero $i \geq 1$

Paso 1: escribir algunos. $V_1 = (-1, 1),\ V_2 = (-2, 2),\ V_3 = (-3, 3), \ldots$
Cada uno contiene al anterior $\Rightarrow$ familia **creciente**.

a. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} V_i = V_4 = (-4, 4)$

b. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4} V_i = V_1 = (-1, 1)$

d. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} V_i = V_n = (-n, n)$

e. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} V_i = V_1 = (-1, 1)$

f. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = \mathbb{R}$

g. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = (-1, 1)$

c. ¿Mutuamente disjuntos? **No**: el 0 está en todos (por ejemplo $V_1 \cap V_2 = (-1, 1) \neq \varnothing$).

¿Por qué f da $\mathbb{R}$? Dado cualquier real x, elige un entero $i > |x|$. Entonces $-i < x < i$, o sea $x \in V_i$. Todo real cae en alguno.

Práctica 2: familias crecientes de intervalos (tipo ejercicio 16)

CON SOLUCIÓN AQUÍ MISMO

2.1 $X_i = (-\infty,\ i)$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

Solución. $X_1 = (-\infty, 1) \subseteq X_2 = (-\infty, 2) \subseteq \cdots$: **creciente**.

a. $\bigcup^4$ $(-\infty, 4)$ **b.** $\bigcap^4$ $(-\infty, 1)$

d. $\bigcup^n$ $(-\infty, n)$ **e.** $\bigcap^n$ $(-\infty, 1)$

f. $\bigcup^\infty$ $\mathbb{R}$ **g.** $\bigcap^\infty$ $(-\infty, 1)$

c. No: el 0 está en todos.

f: cualquier x es menor que algún entero i, así que $x \in X_i$.

2.2 $Y_i = [-i,\ i]$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

Solución. Igual que V_i pero con corchetes (extremos incluidos): **creciente**.

a. $\bigcup^4$ $[-4, 4]$ **b.** $\bigcap^4$ $[-1, 1]$

d. $\bigcup^n$ $[-n, n]$ **e.** $\bigcap^n$ $[-1, 1]$

f. $\bigcup^\infty$ $\mathbb{R}$ **g.** $\bigcap^\infty$ $[-1, 1]$

c. No: el 0 está en todos.

AHORA TÚ (soluciones al final)

2.3 $Z_i = (0,\ i)$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

2.4 $K_i = \left[\frac{1}{i},\ 1\right]$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.
Pista: escribe K_1, K_2, K_3; ¿qué pasa con K_1?

2.5 $L_i = (-i,\ 0]$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

3. Familia decreciente y el caso infinito (tipo ejercicio 16)

FÓRMULAS

Familia decreciente $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$

Cada conjunto queda **dentro** del anterior.

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_0 \quad \text{(el más grande)}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = A_n \quad \text{(el más chico)}$$

Intersección infinita

Puede quedar **vacía** aunque cada conjunto sea enorme.
Cómo justificar $= \varnothing$: toma un x cualquiera y encuentra *un* índice i con $x \notin A_i$.

Disjuntos en familias anidadas

Si están anidados (crecientes o decrecientes) y no son vacíos $\Rightarrow$ **no** son disjuntos.

Receta rápida

1. Escribe A_0, A_1, A_2 explícitamente.
2. ¿Crece o decrece? Usa la regla.
3. Revisa extremos abiertos o cerrados.

EJERCICIO RESUELTO

Sea $T_i = \left(0,\ \frac{1}{i}\right)$ para todo entero $i \geq 1$

Paso 1: escribir algunos. $T_1 = (0,1),\ T_2 = (0,\frac{1}{2}),\ T_3 = (0,\frac{1}{3}), \ldots$
Cada uno queda dentro del anterior $\Rightarrow$ familia **decreciente**.

a. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} T_i = T_1 = (0,1)$

b. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4} T_i = T_4 = \left(0,\frac{1}{4}\right)$

d. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} T_i = T_1 = (0,1)$

e. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} T_i = T_n = \left(0,\frac{1}{n}\right)$

f. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = (0,1)$

g. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} T_i = \varnothing$

c. ¿Mutuamente disjuntos? **No**: por ejemplo $\frac{1}{10} \in T_1 \cap T_2$.

¿Por qué g da $\varnothing$? Si $x \leq 0$, no está en ningún T_i. Si $x > 0$, existe un entero $i > \frac{1}{x}$, así que $\frac{1}{i} < x$ y $x \notin T_i$. Ningún real está en *todos*.

¡Ojo!

$W_i = (i, \infty)$ también es **decreciente**: al subir i el intervalo se achica. Aplica la misma regla y el mismo argumento para el caso ∞.

Práctica 3: familias decrecientes y el caso infinito (tipo ejercicio 16)

CON SOLUCIÓN AQUÍ MISMO

3.1 $M_i = [i,\ \infty)$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

Solución. $M_1 = [1,\infty) \supseteq M_2 = [2,\infty) \supseteq \cdots$: **decreciente**.

a. $\bigcup^4$ $[1,\infty)$ **b.** $\bigcap^4$ $[4,\infty)$

d. $\bigcup^n$ $[1,\infty)$ **e.** $\bigcap^n$ $[n,\infty)$

f. $\bigcup^\infty$ $[1,\infty)$ **g.** $\bigcap^\infty$ $\varnothing$

c. No: por ejemplo $10 \in M_1 \cap M_2$.

g: para cualquier x hay un entero $i > x$, y entonces $x \notin M_i$.

3.2 $N_i = \left(-\frac{1}{i},\ \frac{1}{i}\right)$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

Solución. Se van cerrando alrededor del 0: **decreciente**.

a. $\bigcup^4$ $(-1,1)$ **b.** $\bigcap^4$ $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

d. $\bigcup^n$ $(-1,1)$ **e.** $\bigcap^n$ $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$

f. $\bigcup^\infty$ $(-1,1)$ **g.** $\bigcap^\infty$ $\{0\}$

c. No: el 0 está en todos.

g: el 0 está en todos; si $x \neq 0$, elige i con $\frac{1}{i} < |x|$ y $x \notin N_i$. ¡No siempre da $\varnothing$!

AHORA TÚ (soluciones al final)

3.3 $P_i = (-\infty,\ -i)$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

3.4 $Q_i = \left[0,\ \frac{1}{i}\right]$ para todo entero $i \geq 1$

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.

3.5 $S_i = [i,\ i+1)$ para todo entero $i \geq 0$ (¡reto!)

Calcula los incisos **a**–**g** como en el ejercicio 16: uniones e intersecciones hasta 4, hasta n y hasta ∞, y si son mutuamente disjuntos.
Aquí empieza en $i = 0$: a es $\bigcup_{i=0}^4 S_i$, etc.
Pista: esta familia **no** es anidada; escribe S_0, S_1, S_2 y dibújalos en la recta.

4. Conjunto potencia (tipo ejercicio 17)

FÓRMULAS

Conjunto potencia

$\mathscr{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$: **todos** los subconjuntos de A.

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$

- Siempre contiene a $\varnothing$ y a A.
- Lístalos por tamaño: $0, 1, 2, \ldots, |A|$ elementos.
- Hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamaño k.
- $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ (tiene 1 elemento).
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Operaciones previas

- $A \cap B$: los comunes. $A \cup B$: todos sin repetir.
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, y el orden importa: $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Primero calcula lo de adentro y **después** su potencia.

EJERCICIO RESUELTO

Sean $A = \{3, 4\}$ y $B = \{4, 5\}$

a. $A \cap B = \{4\} \ \Rightarrow \ \mathscr{P}(A \cap B) = \{\varnothing, \{4\}\}$ $(2^1 = 2)$

b. $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ $(2^2 = 4)$

c. $A \cup B = \{3, 4, 5\} \ \Rightarrow$ $(2^3 = 8)$

$$\mathscr{P}(A \cup B) = \{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$$

d. $A \times B = \{(3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5)\}$ tiene $2 \cdot 2 = 4$ elementos $\Rightarrow |\mathscr{P}(A \times B)| = 2^4 = 16$.
Llamemos $p = (3, 4),\ q = (3, 5),\ r = (4, 4),\ s = (4, 5)$:

0 elementos (1):	$\varnothing$
1 elemento (4):	$\{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}$
2 elementos (6):	$\{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}$
3 elementos (4):	$\{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}$
4 elementos (1):	$\{p, q, r, s\}$

Total: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ ✓ (al escribirlo, sustituye p, q, r, s por los pares).

Práctica 4: conjunto potencia (tipo ejercicio 17)

CON SOLUCIÓN AQUÍ MISMO

4.1 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$

Calcula **a.** $\mathscr{P}(A \cap B)$ **b.** $\mathscr{P}(A)$ **c.** $\mathscr{P}(A \cup B)$ **d.** $\mathscr{P}(A \times B)$

Solución.

a. $A \cap B = \{1\}$: $\mathscr{P}(A \cap B) = \{\varnothing, \{1\}\}$

b. $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}\}$

c. $A \cup B = \{1, 2\}$: $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

d. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2)\}$:
$\mathscr{P}(A \times B) = \{\varnothing, \{(1, 1)\}, \{(1, 2)\}, \{(1, 1), (1, 2)\}\}$

4.2 $A = \{x, y\}$, $B = \{z\}$

Calcula **a.** $\mathscr{P}(A \cap B)$ **b.** $\mathscr{P}(A)$ **c.** $\mathscr{P}(A \cup B)$ **d.** $\mathscr{P}(A \times B)$

Solución.

a. $A \cap B = \varnothing$: $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ (¡1 elemento, no 0!)

b. $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

c. $A \cup B = \{x, y, z\}$: $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

d. $A \times B = \{(x, z), (y, z)\}$:
$\mathscr{P}(A \times B) = \{\varnothing, \{(x, z)\}, \{(y, z)\}, \{(x, z), (y, z)\}\}$

AHORA TÚ (soluciones al final)

4.3 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$

Calcula **a.** $\mathscr{P}(A \cap B)$ **b.** $\mathscr{P}(A)$ **c.** $\mathscr{P}(A \cup B)$ **d.** $\mathscr{P}(A \times B)$

4.4 $A = \{5, 6\}$, $B = \{7, 8\}$

Calcula **a.** $\mathscr{P}(A \cap B)$ **b.** $\mathscr{P}(A)$ **c.** $\mathscr{P}(A \cup B)$ **d.** $\mathscr{P}(A \times B)$

4.5 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ **(¡cuidado!)**

Calcula **a.** $\mathscr{P}(A \cap B)$ **b.** $\mathscr{P}(A)$ **c.** $\mathscr{P}(A \cup B)$ **d.** $\mathscr{P}(A \times B)$

Soluciones de “Ahora tú”

1.3 $F_i = \{i, 10 - i\}$

$F_1 = \{1, 9\},\ F_2 = \{2, 8\},\ F_3 = \{3, 7\},\ F_4 = \{4, 6\}$.
a. $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ b. $\varnothing$ c. **Sí**, ningún par comparte elementos.

1.4 $G_i = \{1, i\}$

$G_1 = \{1, 1\} = \{1\},\ G_2 = \{1, 2\},\ G_3 = \{1, 3\},\ G_4 = \{1, 4\}$.
a. $\{1, 2, 3, 4\}$ b. $\{1\}$ c. **No**, el 1 está en todos.

1.5 $H_i = \{i, 2^i\}$

$H_1 = \{1, 2\},\ H_2 = \{2, 4\},\ H_3 = \{3, 8\},\ H_4 = \{4, 16\}$.
a. $\{1, 2, 3, 4, 8, 16\}$ b. $\varnothing$ c. **No**: $H_1 \cap H_2 = \{2\}$ (y $H_2 \cap H_4 = \{4\}$).

2.3 $Z_i = (0, i)$ **(creciente)**

a. $\bigcup^4$ $(0, 4)$ **b.** $\bigcap^4$ $(0, 1)$
d. $\bigcup^n$ $(0, n)$ **e.** $\bigcap^n$ $(0, 1)$
f. $\bigcup^\infty$ $(0, \infty)$ **g.** $\bigcap^\infty$ $(0, 1)$
c. No: por ejemplo $\frac{1}{2}$ está en todos.

2.4 $K_i = [\frac{1}{i}, 1]$ **(creciente; $K_1 = [1, 1] = \{1\}$)**

a. $\bigcup^4$ $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ **b.** $\bigcap^4$ $\{1\}$
d. $\bigcup^n$ $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ **e.** $\bigcap^n$ $\{1\}$
f. $\bigcup^\infty$ $(0, 1]$ **g.** $\bigcap^\infty$ $\{1\}$
c. No: el 1 está en todos.
f: el 0 nunca entra (siempre $\frac{1}{i} > 0$), pero cualquier $x \in (0, 1]$ entra cuando $\frac{1}{i} \leq x$.

2.5 $L_i = (-i, 0]$ **(creciente)**

a. $\bigcup^4$ $(-4, 0]$ **b.** $\bigcap^4$ $(-1, 0]$
d. $\bigcup^n$ $(-n, 0]$ **e.** $\bigcap^n$ $(-1, 0]$
f. $\bigcup^\infty$ $(-\infty, 0]$ **g.** $\bigcap^\infty$ $(-1, 0]$
c. No: el 0 está en todos.

3.3 $P_i = (-\infty, -i)$ **(decreciente)**

a. $\bigcup^4$ $(-\infty, -1)$ **b.** $\bigcap^4$ $(-\infty, -4)$
d. $\bigcup^n$ $(-\infty, -1)$ **e.** $\bigcap^n$ $(-\infty, -n)$
f. $\bigcup^\infty$ $(-\infty, -1)$ **g.** $\bigcap^\infty$ $\varnothing$
c. No: por ejemplo -10 está en $P_1 \cap P_2$.
g: para cualquier x hay un entero i con $-i < x$, y entonces $x \notin P_i$.

3.4 $Q_i = [0, \frac{1}{i}]$ **(decreciente)**

a. $\bigcup^4$ $[0, 1]$ **b.** $\bigcap^4$ $\left[0, \frac{1}{4}\right]$
d. $\bigcup^n$ $[0, 1]$ **e.** $\bigcap^n$ $\left[0, \frac{1}{n}\right]$
f. $\bigcup^\infty$ $[0, 1]$ **g.** $\bigcap^\infty$ $\{0\}$
c. No: el 0 está en todos.
g: el 0 siempre está (corchete); cualquier $x > 0$ queda fuera cuando $\frac{1}{i} < x$.

3.5 $S_i = [i, i + 1)$, $i \geq 0$ **(no anidada)**

$S_0 = [0, 1),\ S_1 = [1, 2),\ S_2 = [2, 3), \ldots$ son “ladrillos” pegados que no se enciman.

a. $\bigcup^4$ $[0, 5)$ **b.** $\bigcap^4$ $\varnothing$
d. $\bigcup^n$ $[0, n + 1)$ **e.** $\bigcap^n$ $\varnothing$
f. $\bigcup^\infty$ $[0, \infty)$ **g.** $\bigcap^\infty$ $\varnothing$
c. Sí: si $i < j$, todo S_i es $< i + 1 \leq j$ y todo S_j es $\geq j$; no comparten nada.
Ojo: hasta 4 es $S_0 \cup \cdots \cup S_4 = [0, 5)$, porque $S_4 = [4, 5)$.

4.3 $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$

a. $A \cap B = \{1\}$: $\{\varnothing, \{1\}\}$
b. $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
c. $A \cup B = \{0,1,2\}$: $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$
d. $A \times B = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$, 16 subconjuntos. Con $p = (0,1), q = (0,2), r = (1,1), s = (1,2)$:
$\varnothing$; $\{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}$; $\{p,q\}, \{p,r\}, \{p,s\}, \{q,r\}, \{q,s\}, \{r,s\}$;
$\{p,q,r\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{q,r,s\}$; $\{p,q,r,s\}$

4.4 $A = \{5,6\}$, $B = \{7,8\}$

a. $A \cap B = \varnothing$: $\{\varnothing\}$
b. $\{\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{5,6\}\}$
c. $A \cup B = \{5,6,7,8\}$, 16 subconjuntos:
$\varnothing$; $\{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$; $\{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}$;
$\{5,6,7\}, \{5,6,8\}, \{5,7,8\}, \{6,7,8\}$; $\{5,6,7,8\}$
d. $A \times B = \{(5,7), (5,8), (6,7), (6,8)\}$, 16 subconjuntos. Con $p = (5,7), q = (5,8), r = (6,7), s = (6,8)$:
$\varnothing$; $\{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}$; $\{p,q\}, \{p,r\}, \{p,s\}, \{q,r\}, \{q,s\}, \{r,s\}$;
$\{p,q,r\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{q,r,s\}$; $\{p,q,r,s\}$

4.5 $A = B = \{1,2\}$

a., b. y c. dan lo mismo, porque $A \cap B = A \cup B = A = \{1,2\}$:
$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
d. $A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$: ¡4 pares, $(1,2) \neq (2,1)$!
16 subconjuntos. Con $p = (1,1), q = (1,2), r = (2,1), s = (2,2)$:
$\varnothing$; $\{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}$; $\{p,q\}, \{p,r\}, \{p,s\}, \{q,r\}, \{q,s\}, \{r,s\}$;
$\{p,q,r\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{q,r,s\}$; $\{p,q,r,s\}$